Curso 1º - Grado en Física

Examen de Análisis Matemático I – Soluciones

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x - \log(x) - 2$ para todo $x > 0$.

a) Prueba que f alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$.

b) Determina el conjunto imagen $f(\mathbb{R}^+)$ de dicha función.

c) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}^+$ y localiza dichas soluciones en intervalos disjuntos.

Solución. a) Tenemos que $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ se anula solamente en $x = 1$.

Si $0 < x < 1$ es $f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente en $]0, 1]$.

Luego $0 < x < 1 \Longrightarrow f(x) > f(1)$.

Si $1 < x$ es $f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente en $[1, +\infty[$.

Luego $1 < x \Longrightarrow f(1) < f(x)$.

Hemos probado así que para todo $x > 0$ se verifica $f(1) \leqslant f(x)$. Por tanto f alcanza un mínimo absoluto en $x = 1$.

b) f es una función continua definida en un intervalo, por el teorema del valor intermedio, la imagen de f, $J = f(\mathbb{R}^+)$, es un intervalo. Por lo visto en el punto anterior, J tiene mínimo que es $f(1) = -1$. Es claro que J no está mayorado porque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Luego $J = [-1, +\infty[$.

c) Como $f(\mathrm{e}^{-2}) = \mathrm{e}^{-2} > 0$, $f(1) = -1 < 0$ y $f(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^2 - 4 > 0$, el teorema de Bolzano nos dice que f tiene al menos un cero en cada intervalo $]\mathrm{e}^{-2}, 1[$, $]1, \mathrm{e}^2[$. Como, por lo visto en el punto a), f es inyectiva en $]0, 1]$ y en $[1, +\infty[$, concluimos que f tiene exactamente dos ceros.

También puede razonarse usando el teorema de Rolle: como f' tiene un único cero, f no puede tener más de dos ceros. ☺

Ejercicio 2. Se desea construir un tanque cilíndrico sin tapa cuya superficie sea $K\pi$ metros cuadrados. ¿Qué relación debe existir entre el radio y la altura para que el volumen sea máximo? ¿Para qué valor de K el radio es 1 metro? Calcula el volumen máximo para $K = 12$.

Solución. Sea r el radio de la base y h la altura. El área de la superficie del depósito es $\pi r^2 + 2\pi r h$. Debe verificarse que $\pi r^2 + 2\pi r h = K\pi$ de donde obtenemos que $h = \dfrac{K - r^2}{2r}$. El volumen viene dado por $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \dfrac{K - r^2}{2r} = \dfrac{\pi}{2}(Kr - r^3)$, donde $r > 0$. Tenemos que $V'(r) = \dfrac{\pi}{2}(K - 3r^2)$. El único punto donde se anula la derivada es $r_0 = \sqrt{K/3}$.

Para $0 < r < r_0$ es $V'(r) > 0$, por lo que V es estrictamente creciente en $]0, r_0]$.

Luego $0 < r < r_0 \Longrightarrow V(r) < V(r_0)$.

Para $r_0 < r$ es $V'(r) < 0$, por lo que V es estrictamente decreciente en $[r_0, +\infty[$.

Luego $r_0 < r \Longrightarrow V(r_0) > V(r)$.

Hemos probado así que para todo $r > 0$ se verifica $V(r) \leqslant V(r_0)$. Por tanto V alcanza un máximo absoluto en r_0.

La altura correspondiente a r_0 es $h_0 = \dfrac{K - r_0^2}{2r_0} = \dfrac{3r_0^2 - r_0^2}{2r_0} = r_0$.

Para $k = 3$ es $r_0 = 1$. Para $K = 12$ se tiene que $r_0 = 2$ y $V(r_0) = \dfrac{\pi}{2}(24 - 8) = 8\pi$ metros cúbicos. ☺

Ejercicio 3.

a) Calcula el límite $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{3\,\mathrm{sen}\,x - 3\,x\,\cos x}{x^3}\right)^{1/x^2}$.

b) Calcula los límites laterales en 0 de la función dada para todo $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{\int_0^{x^2} \mathrm{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

Solución. a) Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\,\mathrm{sen}\,x - 3\,x\,\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\,\mathrm{sen}\,x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x} = 1.$$

Donde hemos aplicado una vez la regla de L'Hôpital. El límite pedido es, por tanto, una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{3\,\mathrm{sen}\,x - 3\,x\,\cos x}{x^3} - 1\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{3\,\mathrm{sen}\,x - 3\,x\,\cos x - x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\,\mathrm{sen}\,x - 3x^2}{5x^4} = \\ &= \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x - x}{x^3} = \frac{3}{5}\frac{-1}{6} = \frac{-1}{10}\end{aligned}$$

Donde hemos aplicado una vez la regla de L'Hôpital. En consecuencia, el límite pedido es igual a $\mathrm{e}^{-1/10}$.

b) El límite pedido es una indeterminación del tipo $0/0$. Aplicamos la regle de L'Hôpital. Para derivar el numerador tenemos en cuenta que la función $H(x) = \int_0^{x^2}\mathrm{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$ es la composición de las funciones $F(x) = \int_0^{x}\mathrm{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$ y $g(x) = x^2$, pues claramente $H(x) = F(g(x))$. Por la regla de la cadena será $H'(x) = F'(g(x))g'(x) = \mathrm{sen}(\sqrt{g(x)})g'(x) = \mathrm{sen}(\sqrt{x^2})2x = \mathrm{sen}(|x|)2x$. Por tanto:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\mathrm{sen}(|x|)2x}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\mathrm{sen}(|x|)2x}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\mathrm{sen}(-x)}{x} = -\frac{3}{2}.$$

☺

Ejercicio 4. Estudia la convergencia de las series:

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} n^3 2^{-n} \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$$

Solución. a) Es una serie de términos positivos. Aplicamos el criterio del cociente. Pongamos $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1.$$

La serie converge.

b) Es una serie de términos positivos. Aplicamos el criterio del cociente. Pongamos $a_n = n^3 2^{-n}$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1.$$

La serie converge.

c) Para ver si es convergente, como se trata de una serie alternada, aplicaremos el criterio de Leibniz. Probaremos que la sucesión $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ es decreciente y converge a 0. Tenemos que:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n \quad &\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow n\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n+1} < (n+1)\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n} \iff \sqrt{n+1} < \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n} \end{aligned}$$

Como esta última desigualdad es evidentemente cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\{a_n\}$ es decreciente. Por otra parte, es evidente que

$$0 < a_n < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.$$

Por lo que $\{a_n\} \to 0$. Por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.

Esta serie no es absolutamente convergente porque

$$a_n \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Y la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ es divergente. ☺

Ejercicio 5. Dado $t > 1$, sea $V(t)$ el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(x^2-2x+2)}} \qquad (1 \leqslant x \leqslant t)$$

Calcula $V(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

Solución. El volumen viene dado por $V(t) = \pi\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x$. Calcularemos una primitiva de la función $\dfrac{1}{x(x^2-2x+2)}$. La descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{1}{x(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2} \quad \Longrightarrow \quad 1 = A(x^2-2x+2) + (Cx+D)x$$

Haciendo $x = 0$ resulta $A = 1/2$. Identificando coeficientes de x^2 y de x tenemos que $A + C = 0$ y $-2A + D = 0$. Resulta así $C = -1/2$, $D = 1$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}V(t) \quad &= \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^t \frac{-\frac{1}{2}x+1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(t) - \frac{1}{4}\int_1^t \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\log(t) - \frac{1}{4}\log(t^2-2t+2) + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}(t-1) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}(t-1). \end{aligned}$$

Deducimos que:

$$\lim_{t\to+\infty} V(t) = \frac{\pi^2}{8}.$$

☺